Representação de Dados (inteiros com sinal)

Noemi Rodriguez
Ana Lúcia de Moura
Raúl Renteria
Alexandre Meslin

http://www.inf.puc-rio.br/~inf1018

Representação de Inteiros

Com **n** bits podemos representar $\mathbf{2^n}$ valores

Representação de Inteiros

Com **n** bits podemos representar $\mathbf{2^n}$ valores

- para inteiros não negativos (*unsigned*) o intervalo de valores é $[0, 2^n-1]$

Representação de Inteiros

Com **n** bits podemos representar 2^n valores

- para inteiros não negativos (*unsigned*) o intervalo de valores é $[0, 2^n-1]$
- para inteiros com sinal, teremos 0, valores negativos e valores positivos

Representação de Inteiros

Com **n** bits podemos representar $\mathbf{2^n}$ valores

- para inteiros não negativos (*unsigned*) o intervalo de valores é $[0, 2^n-1]$
- para inteiros com sinal, teremos 0, valores negativos e valores positivos

Como representar esses valores?

- há diferentes formas de representação

Sinal e Magnitude

A ideia é usar o bit mais significativo como "sinal"

- "1" → valor negativo

Sinal e Magnitude

A ideia é usar o bit mais significativo como "sinal"

"1" → valor negativo

Com 4 bits temos sinal + 8 valores possíveis (0..7)

0000 ... 0111	**0 a 7 decimal**
1001 ... 1111	**-1 a -7 decimal**
1000	**zero negativo?**

Complemento a 2

Representação mais usual para inteiros com sinal

Alguns padrões de bits representam valores positivos e alguns representam valores negativos

- uma única representação para 0

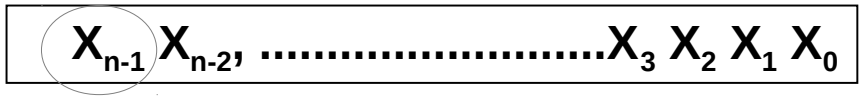
Complemento a 2

Representação mais usual para inteiros com sinal

Alguns padrões de bits representam valores positivos e alguns representam valores negativos

uma única representação para 0

O bit mais significativo também distingue valores negativos e não negativos



0 – valor não negativo
1 – valor negativo

Equivalência mod 2^n

Relação que define uma partição dos inteiros em classes de equivalência

x Ξ y (mod k) se |x-y| = m*k para algum m

Equivalência mod 2^n

Relação que define uma partição dos inteiros em classes de equivalência

$x \equiv y \pmod{k}$ se $|x-y| = m*k$ para algum m

{..., -16, -8, 0, 8, 16, ...}	**000**
{..., -15, -7, 1, 9, 17, ...}	**001**
{..., -14, -6, 2, 10, 18, ...}	**010**
{..., -13, -5, 3, 11, 19, ...}	**011**
{..., -12, -4, 4, 12, 20, ...}	**100**
{..., -11, -3, 5, 13, 21, ...}	**101**
{..., -10, -2, 6, 14, 22, ...}	**110**
{..., -9, -1, 7, 15, 23, ...}	**111**

0

alguns números > 0

alguns números < 0

Representação complemento a 2

Idéia central: é uma representação mod 2^n

Se x>= 0 $rep_2(x) =$ **x**

Se x<0 então $rep_2(x) =$ **2^n + x**

→ menor positivo na classe de equivalência de x

Representação complemento a 2

Idéia central: é uma representação mod 2^n

Se x>= 0 $rep_2(x) = \mathbf{x}$

Se x<0 então $rep_2(x) = \mathbf{2^n + x}$

→ menor positivo na classe de equivalência de x

Exemplos para n = 4:

$rep_2(-2) = 2^4 + (-2) = 14 = [1110]$
$rep_2(-8) = 2^4 + (-8) = 8 = [1000]$
$rep_2(-1) = 2^4 + (-1) = 15 = [1111]$

binário	Compl-2	binário	Compl-2
0000	0	1111	-1
0001	1	1110	-2
0010	2	1101	-3
...	..	1001	-7
0111	7	1000	-8

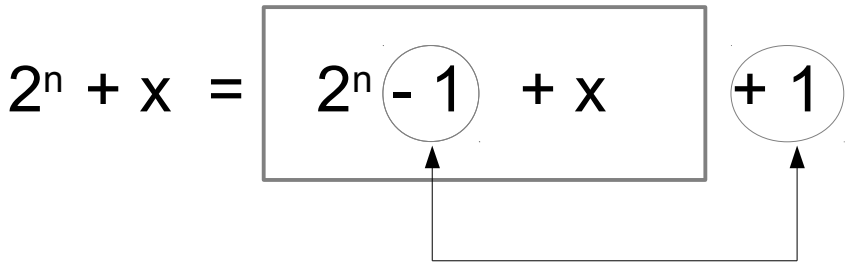
É um mecanismo trabalhoso se o número de bits é muito grande...

Encontrar Representação Binária

$x<0 \rightarrow rep_2(x) = 2^n + x$

Encontrar Representação Binária

$x<0 \rightarrow rep_2(x) = 2^n + x$



Encontrar Representação Binária

$x<0 \rightarrow rep_2(x) = 2^n + x$

$$2^n + x = \boxed{(2^n - 1) - (-x)} + 1$$

$$(2^n - 1) + x + 1$$

Encontrar Representação Binária

$x<0 \rightarrow rep_2(x) = 2^n + x$

$$2^n + x = \boxed{(2^n - 1) - (- x)} + 1$$

1111 1111

Encontrar Representação Binária

$x<0 \rightarrow rep_2(x) = 2^n + x$

$$2^n + x = \boxed{(2^n - 1) - (- x)} + 1$$

1111 .... 1111 →

1 – 1 = 0

1 – 0 = 1

Encontrar Representação Binária

$x<0 \rightarrow rep_2(x) = 2^n + x$

$$2^n + x = \boxed{(2^n - 1) - (-x)} + 1$$

1111 .... 1111 → **1 – 1 = 0**, **1 – 0 = 1** → complemento bit-a-bit !

Resumindo ...

Encontrar a representação de $x < 0 \rightarrow (2^n - 1) - (-x) + 1$

Resumindo ...

Encontrar a representação de $x < 0 \rightarrow (2^n - 1) - (-x) + 1$

1) obter a representação de -x

Resumindo ...

Encontrar a representação de $x < 0 \rightarrow (2^n - 1) - (-x) + 1$

1) obter a representação de -x

2) inverter bit a bit

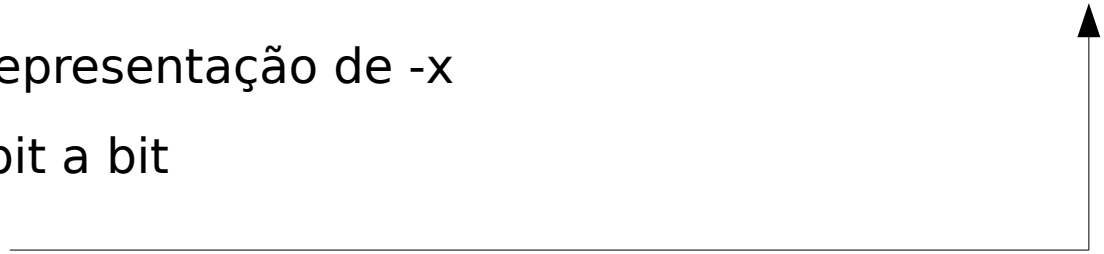
Resumindo ...

Encontrar a representação de $x < 0 \rightarrow (2^n - 1) - (-x) + 1$

1) obter a representação de -x

2) inverter bit a bit

3) somar 1



Exemplo

-5 → 5 → 0000 0101 → 1111 1010

+ 1

1111 1011

para achar a representação em comp2

Exemplo

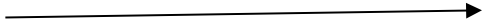
-5 → 5 → 0000 0101 → 1111 1010

+ 1

1111 1011

para achar a representação em comp2

para achar o valor de uma representação



1111 1011 → 0000 0100

+ 1

0000 0101 → 5 → -5

Intervalo de Valores

Com **n** bits → $X_{n-1}\ X_{n-2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_3\ X_2\ X_1\ X_0$

- o menor valor representado é -2^{n-1} → **1000 .....0000**
- o maior valor representado é $2^{n-1}-1$ → **0111 .....1111**

Intervalo de Valores

Com **n** bits → $X_{n-1}\ X_{n-2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_3\ X_2\ X_1\ X_0$

o menor valor representado é -2^{n-1} → **1000 .....0000**

o maior valor representado é $2^{n-1}-1$ → **0111 .....1111**

Com 8 bits → $[-2^7, 2^7-1] \rightarrow [-128, 127]$

Com 16 bits → $[-2^{15}, 2^{15}-1] \rightarrow [-32768, 32767]$

Intervalo de Valores

Com **n** bits → $X_{n-1}\ X_{n-2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_3\ X_2\ X_1\ X_0$

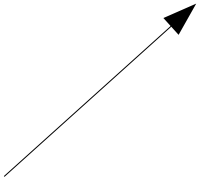
o menor valor representado é -2^{n-1} → **1000 .....0000**

o maior valor representado é $2^{n-1}-1$ → **0111 .....1111**

Com 8 bits → $[-2^7, 2^7-1] \rightarrow [-128, 127]$

Com 16 bits → $[-2^{15}, 2^{15}-1] \rightarrow [-32768, 32767]$

intervalo é assimétrico!
- ½ **para os negativos**
- ½ **para positivos + 0**



Intervalos com e sem Sinal

Exemplos para n = 16

	Decimal	Hex	Binary
UMax	65535	FF FF	11111111 11111111
TMax	32767	7F FF	01111111 11111111
TMin	-32768	80 00	10000000 00000000
-1	-1	FF FF	11111111 11111111
0	0	00 00	00000000 00000000

Soma e Subtração

Em complemento a 2 somas e subtrações usam **adição**

- subtração é a soma do complemento
- achar o complemento é trivial

Soma e Subtração

Em complemento a 2 somas e subtrações usam **adição**

- subtração é a soma do complemento
- achar o complemento é trivial

Aritmética módulo 2^n garante correção mesmo com sinais diferentes (a menos de *overflow*)

$$
\begin{aligned}
(1 - 2)\ (\text{mod } 8) &\rightarrow (1 + (-2))\ \text{mod } 8) \\
&\rightarrow (1 \text{ mod } 8) + (-2 \text{ mod } 8) \\
&\rightarrow 1 + 6 \\
&\rightarrow 7 \\
&\rightarrow \text{rep}[-1 \text{ mod } 8]
\end{aligned}
$$

Exemplos com 4 bits

2 + 3 → 0010 + 0011 → 0101 → 5

7 – 1 → 7 + (-1) → 0111 + 1111 → 0110 → 6

(-3) + 6 → 1101 + 0110 → 0011 → 3

(-1) + (-1) → 1111 + 1111 → 1110 → (-2)

Inteiros com Sinal em C

O padrão não requer representação complemento a 2

- mas a maioria das máquinas o faz

Não é boa prática assumir a faixa de valores

- <limits.h> define constantes para os tipos de dados inteiros
- INT_MAX, INT_MIN, UINT_MAX

Signed e Unsigned em C

Na conversão entre tipos **de mesmo tamanho** o padrão de bits não muda

apenas a **interpretação** desse padrão

Signed e Unsigned em C

Na conversão entre tipos **de mesmo tamanho** o padrão de bits não muda

apenas a **interpretação** desse padrão

```
short int x =  -12345; /* 1100 1111 1100 0111 */
```

Signed e Unsigned em C

Na conversão entre tipos **de mesmo tamanho** o padrão de bits não muda

apenas a **interpretação** desse padrão

```
short int x =  -12345; /* 1100 1111 1100 0111 */
unsigned short ux = (unsigned short) x; /* 53191 */
```

Signed e Unsigned em C

Na conversão entre tipos **de mesmo tamanho** o padrão de bits não muda

apenas a **interpretação** desse padrão

```
short int x =  -12345; /* 1100 1111 1100 0111 */
unsigned short ux = (unsigned short) x; /* 53191 */

ux = 65535;              /* 1111 1111 1111 1111 */
```

Signed e Unsigned em C

Na conversão entre tipos **de mesmo tamanho** o padrão de bits não muda

apenas a **interpretação** desse padrão

```
short int x =  -12345; /* 1100 1111 1100 0111 */
unsigned short ux = (unsigned short) x; /* 53191 */

ux = 65535;              /* 1111 1111 1111 1111 */
x = (short int) ux;      /* -1 */
```

Operadores Relacionais

Operações de comparação (<, <=, etc) devem tratar operandos com e sem sinal

- existem instruções de máquina para cada caso
- o compilador C gera o código adequado ao tipo de operandos

```
int a, b;
unsigned int c, d;

...
if (a < b)     /* operandos com sinal */
  ...
if (c < d)     /* operandos sem sinal */
  ...
```

Comportamento peculiar...

Em expressões com operandos de tipo **int** com e sem sinal, todos os valores são tratados como **unsigned**

```
int a[2] = {-1, 0};
unsigned int z = 0;

if (a[0] < a[1])
```

Comportamento peculiar...

Em expressões com operandos de tipo **int** com e sem sinal, todos os valores são tratados como **unsigned**

```
int a[2] = {-1, 0};
unsigned int z = 0;

if (a[0] < a[1])  /* true */
```

Comportamento peculiar...

Em expressões com operandos de tipo **int** com e sem sinal, todos os valores são tratados como **unsigned**

```
int a[2] = {-1, 0};
unsigned int z = 0;

if (a[0] < a[1])  /* true */

if (a[0] < z)
```

Comportamento peculiar...

Em expressões com operandos de tipo **int** com e sem sinal, todos os valores são tratados como **unsigned**

```
int a[2] = {-1, 0};
unsigned int z = 0;

if (a[0] < a[1])  /* true */

if (a[0] < z)    /* false !!! */
```

Comportamento peculiar...

Em expressões com operandos de tipo **int** com e sem sinal, todos os valores são tratados como **unsigned**

```
int a[2] = {-1, 0};
unsigned int z = 0;

if (a[0] < a[1])  /* true */

if (a[0] < z)    /* false !!! */

if (a[0] < 0)
```

Comportamento peculiar...

Em expressões com operandos de tipo **int** com e sem sinal, todos os valores são tratados como **unsigned**

```
int a[2] = {-1, 0};
unsigned int z = 0;

if (a[0] < a[1])  /* true */

if (a[0] < z)     /* false !!! */

if (a[0] < 0)     /* true */
```

Comportamento peculiar...

Em expressões com operandos de tipo **int** com e sem sinal, todos os valores são tratados como **unsigned**

```
int a[2] = {-1, 0};
unsigned int z = 0;

if (a[0] < a[1])  /* true */

if (a[0] < z)     /* false !!! */

if (a[0] < 0)     /* true */

if (a[0] < 0U)
```

Comportamento peculiar...

Em expressões com operandos de tipo **int** com e sem sinal, todos os valores são tratados como **unsigned**

```
int a[2] = {-1, 0};
unsigned int z = 0;

if (a[0] < a[1])  /* true */

if (a[0] < z)     /* false !!! */

if (a[0] < 0)    /* true */

if (a[0] < 0U)    /* false !!! */
```

Extensão de Representação

Conversões que aumentam o tamanho

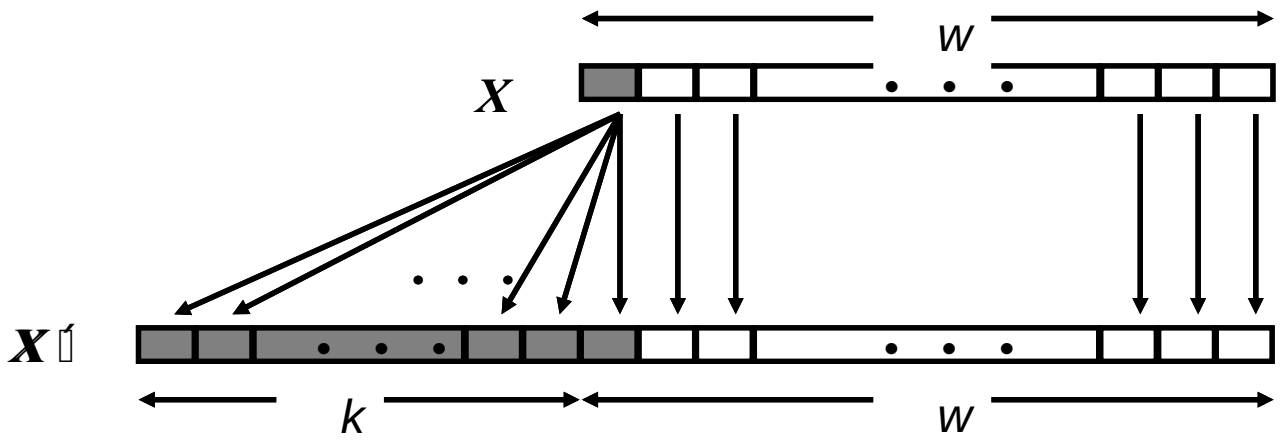
char para short, short para int, int para long, ...

Extensão de Representação

Conversões que aumentam o tamanho

char para short, short para int, int para long, ...

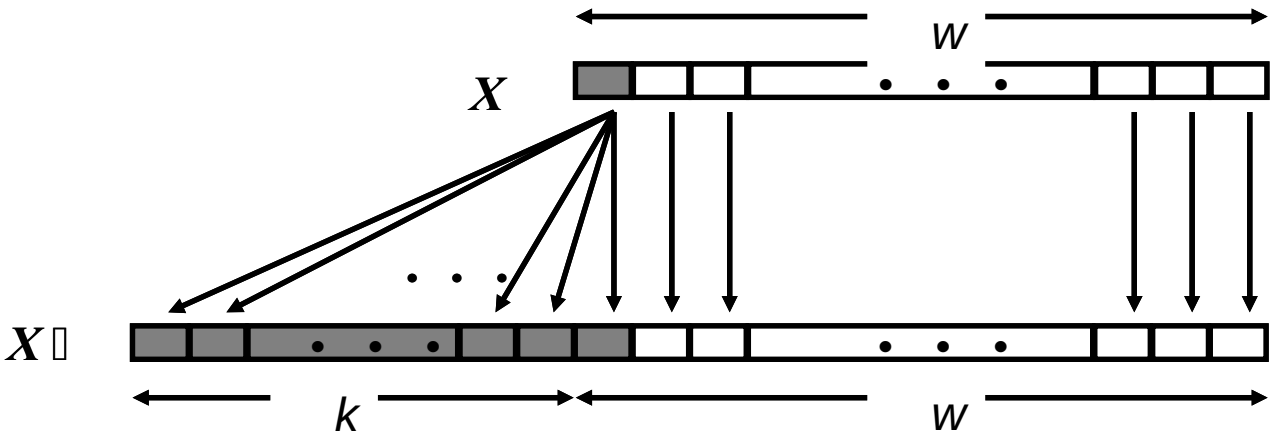
Converter representação com w bits para uma representação com w+k bits, mantendo o valor



Extensão com e sem Sinal

Extensão sem sinal (zero extension)

adicionar k bits 0 à esquerda



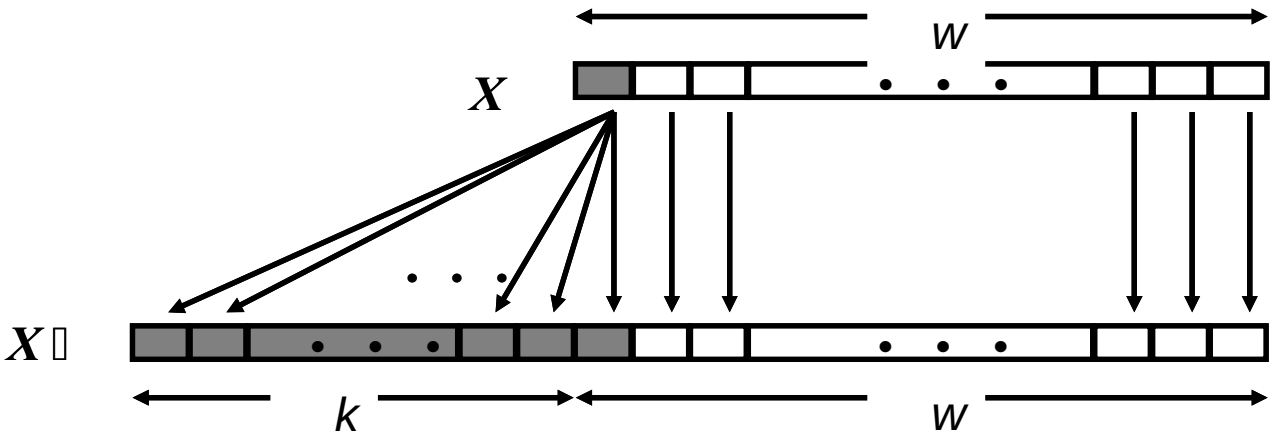
Extensão com e sem Sinal

Extensão sem sinal (zero extension)

adicionar k bits 0 à esquerda

Extensão para complemento a 2 (sign extension)

adicionar k cópias do bit mais significativo à esquerda



Exemplo de Extensão com Sinal

rep_2(-3) em 8 bits → 2^8 + (-3) → 253 → 1111 1101

rep_2(-3) em 16 bits → 2^{16} + (-3) → 65533 → 1111 1111 1111 1101

Exemplo de Extensão com Sinal

$rep_2(-3)$ em 8 bits → $2^8 + (-3)$ → 253 → 1111 1101

$rep_2(-3)$ em 16 bits → $2^{16} + (-3)$ → 65533 → 1111 1111 1111 1101

$2^8 + (-3) + x = 2^{16} + (-3)$

Exemplo de Extensão com Sinal

$rep_2(-3)$ em 8 bits → $2^8 + (-3)$ → 253 → 1111 1101

$rep_2(-3)$ em 16 bits → $2^{16} + (-3)$ → 65533 → 1111 1111 1111 1101

$2^8 + (-3) + x = 2^{16} + (-3)$ → $x = 2^{16} + (-3) - 2^8 - (-3)$

Exemplo de Extensão com Sinal

$rep_2(-3)$ em 8 bits $\rightarrow 2^8 + (-3) \rightarrow 253 \rightarrow$ 1111 1101

$rep_2(-3)$ em 16 bits $\rightarrow 2^{16} + (-3) \rightarrow 65533 \rightarrow$ 1111 1111 1111 1101

$2^8 + (-3) + x = 2^{16} + (-3) \rightarrow x = 2^{16} + (-3) - 2^8 - (-3)$

$$
\begin{array}{r}
1\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000 \\
-\quad\quad\quad 1\ 0000\ 0000 \\
\hline
1111\ 1111\ 0000\ 0000
\end{array}
$$

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
PUC·RIO

Truncamento

Conversões que diminuem o tamanho

short para char, int para short, long para int, ...

Truncamento

Conversões que diminuem o tamanho

- short para char, int para short, long para int, ...

Converter uma representação com w+k bits para uma representação com w bits

- truncamento → remover os k bits mais significativos
- nem sempre é possível manter o valor!

Truncamento

Conversões que diminuem o tamanho

short para char, int para short, long para int, ...

Converter uma representação com w+k bits para uma representação com w bits

truncamento → remover os k bits mais significativos

nem sempre é possível manter o valor!

```
0000 1001  →  9
     1001  →  9
     1001  →  -7
```

unsigned
signed

Truncamento

Conversões que diminuem o tamanho

short para char, int para short, long para int, ...

Converter uma representação com w+k bits para uma representação com w bits

truncamento → remover os k bits mais significativos

nem sempre é possível manter o valor!

0000 1001	→	9	unsigned
1001	→	9	
1001	→	-7	signed

0001 1001	→	25	unsigned
1001	→	9	
1001	→	-7	signed

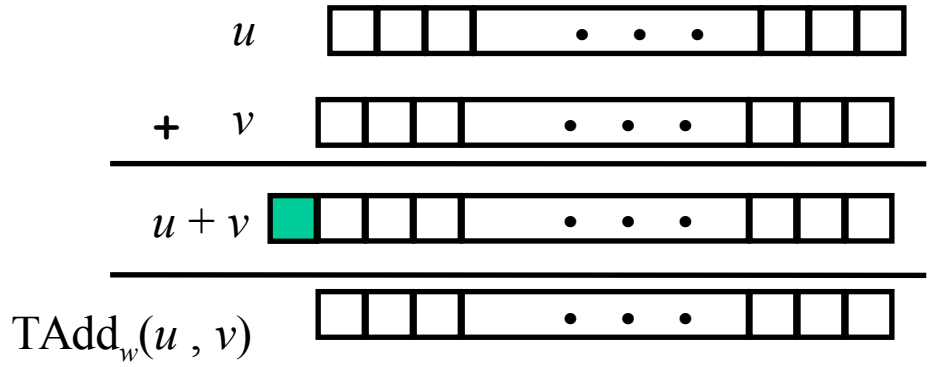
Overflow em Complemento a 2

Resultado não é representável em n bits

Operandos: *w* bits

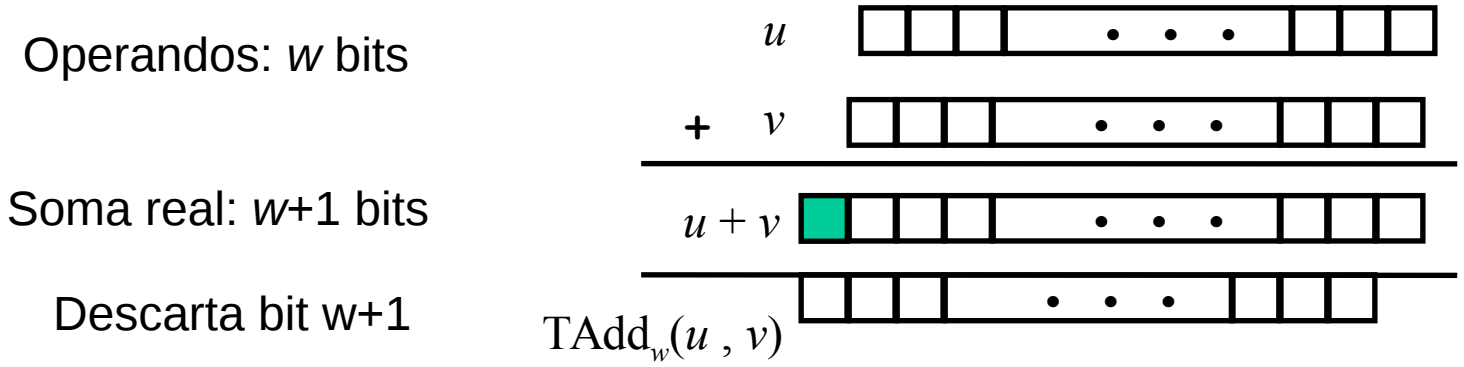
Soma real: *w*+1 bits

Descarta bit w+1



Overflow em Complemento a 2

Resultado não é representável em n bits



Hardware indica situações de overflow signed e unsigned

Mas a indicação é ignorada...

compilador C não gera testes