Departamento de Informática

Disciplina: Modelagem Analítica do Desempenho de Sistemas de Computação

Elementos de Análise Combinatória

Prof. Sérgio Colcher
colcher@inf.puc-rio.br

Elementos de Análise Combinatória

- **Teorema:**
  - ***O experimento de realizar r decisões (seleções) sucessivas, nas quais, para a k-ésima seleção tem-se n_k opções possíveis, produz o total de $n_1 n_2 \ldots n_r$ possíveis resultados diferentes***
- **Exemplo:**
  - ***Colocação de bolas em células:***
    - Ao colocar r bolas em n casas (ou células), faz-se uma seqüência de r decisões com n opções em cada decisão.
      - *Logo, as r bolas podem ser colocadas nas n células de n^r maneiras diferentes*

Exemplo

- Considerando as faces de um dado como as "células":
  - ***jogar um dado r vezes sucessivas produz 6^r diferentes resultados***
    - 5^r resultados não contém a face 2
  - ***Admitindo que os 6^r resultados tem a mesma probabilidade, o evento "a face 2 não aparece" tem probabilidade igual a $(5/6)^r$.***
  - ***A probabilidade do evento "a face 2 aparece" é igual a $1-(5/6)^r$***
    - se $r = 6$, essa probabilidade é menor do que 2/3
      - *Apesar do senso comum achar que, em seis tentativas, a face dois deve aparecer com certeza (i.e., com probabilidade muito alta)...*

Arranjos: Amostras Ordenadas

- **Considere uma população de n elementos a_1, a_2, ..., a_n. Qualquer seqüência de r símbolos tomadas dessa população é denominada uma *amostra ordenada* ou *arranjo*.**
- **Arranjos podem ser**
  - ***com repetição***
    - n^r possíveis amostras
  - ***sem repetição***
    - $r \leq n$
    - $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ *possíveis amostras*

Definição

Para $r \leq n$:

$$(n)_r \equiv n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$Obs.: (n)_n = n!$$

Escolhas Aleatórias Sucessivas

- **Experimento que consiste na escolha sucessiva de r elementos, um por vez, tomados de uma população de n elementos, na qual cada resultado (um arranjo) possível tem a mesma probabilidade dos demais**
  - *Probabilidade n^{-r} para escolhas com repetição*
  - *Probabilidade $1/(n)_r$ para escolhas sem repetição*
- **Exemplos**
  - *Com repetição*
    - jogar um dado várias vezes, lançar uma moeda várias vezes, ...
  - *Sem repetição*
    - retirar sucessivamente cartas de um baralho

Exemplo

- **Em um experimento de escolhas aleatórias sucessivas sem repetição**
  - *Qual é a probabilidade de um elemento específico da população aparecer na amostra ordenada que corresponde a um resultado do experimento ?*

Exemplo

- **Em um experimento de escolhas aleatórias sucessivas sem repetição**
  - *Qual é a probabilidade de um elemento específico da população aparecer na amostra ordenada que corresponde a um resultado do experimento ?*
    - Número de amostras que não contém um determinado elemento: $(n-1)_r$.

Exemplo

- **Em um experimento de escolhas aleatórias sucessivas sem repetição**
  - ***Qual é a probabilidade de um elemento específico da população aparecer na amostra ordenada que corresponde a um resultado do experimento ?***
    - Número de amostras que não contém um determinado elemento: $(n-1)_r$.
      - *Probabilidade:* $p = \frac{(n-1)_r}{(n)_r}$

Exemplo

- **Em um experimento de escolhas aleatórias sucessivas sem repetição**
  - ***Qual é a probabilidade de um elemento específico da população aparecer na amostra ordenada que corresponde a um resultado do experimento ?***
    - Número de amostras que não contém um determinado elemento: $(n-1)_r$.
      - *Probabilidade:* $p = \frac{(n-1)_r}{(n)_r}$
    - A probabilidade procurada é $1 - p$

$$1-\frac{(n-1)_r}{(n)_r} = 1-\frac{\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}}{\frac{n!}{(n-r)!}} = 1-\frac{\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}}{\frac{n(n-1)!}{(n-r)(n-1-r)!}} = 1-\frac{n-r}{n} = \frac{r}{n}$$

Exercício

- **Em um experimento de escolhas aleatórias sucessivas com repetição**
  - ***Qual é a probabilidade de um elemento específico da população aparecer na amostra ordenada que corresponde a um resultado do experimento ?***
    - Resposta: $1 - (1 - 1/n)^r$

Classe de Problemas

- **Considere amostras ordenadas de tamanho *r* com repetição, com escolhas aleatórias tomadas de uma população de tamanho *n* .**
- **Calcular a probabilidade do evento:**
  - ***nenhum elemento aparece mais de uma vez na mesma amostra***

$$p = \frac{\text{número de amostras sem repetição}}{\text{número de amostras total}} = \frac{\text{número de amostras sem repetição}}{\text{número de amostras com repetição}}$$

$$p = \frac{(n)_r}{n^r}$$

Exemplos

- **Bolas e Células**
  - ***Se n bolas são aleatoriamente colocadas em n células, qual é a probabilidade p de que todas as células sejam ocupadas (1 bola em cada)?***
    - $p = n!/n^n$
      - Este valor é surpreendentemente pequeno
        - *para* $n = 7, \quad p = 0{,}00612$
        - *Se, em uma cidade, a média de acidentes semanais é igual a sete, então praticamente todas as semanas terão dias sem acidentes e dias com mais de um acidente. Apenas em uma a cada aproximadamente 165 semanas teremos uma semana com um acidente por dia.*
- **Elevador**
  - ***Um elevador de um prédio com 10 andares deixa o térreo com 7 pessoas. Qual é a probabilidade p de que não haja a saída de mais de uma pessoa em um mesmo andar?***

$$p = \frac{(10)_7}{10^7} = 0{,}06048$$

Exemplos

- **Aniversários**
  - ***As datas de aniversário de r pessoas formam uma amostra de tamanho r com cada elemento tomado do espaço de 365 dias do ano. Qual é a probabilidade de que r aniversários caiam em datas diferentes ?***

$$p = \frac{(365)_r}{365^r}$$

- Para $r = 23$, $p < 0{,}5$
  - *Em um grupo de 23 pessoas, a probabilidade de encontrar duas que tenham a mesma data de aniversário é superior a 50 % !!*

Combinações: Subpopulações

- **Dada uma população de tamanho *n*, quantas subpopulações diferentes de tamanho *r* existem dentro dela ?**
  - ***populações e subpopulações são conjuntos***
    - não importa a ordenação
  - ***subpopulações são também chamadas <u>combinações</u> de elementos da população***

Combinações: Subpopulações

- **Dada uma população de tamanho *n*, quantas subpopulações diferentes de tamanho *r* existem dentro dela ?**
  - ***Dentro de uma população de n elementos, tem-se*** $(n)_r$ ***<u>arranjos</u> de tamanho r***
    - Vários desses arranjos correspondem a uma mesma combinação pois são os mesmos elementos ordenados de forma diferente
    - Sabemos que, dado um conjunto de r elementos temos $r!$ arranjos possíveis desses elementos
      - *Todos esses arranjos correspondem a <u>um</u> mesmo elemento da subpopulação*
  - ***Então o número N procurado é*** $N = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

Definição

- **Coeficiente Binomial**

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\text{Obs.}: \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Teorema

- **Uma população de *n* elementos possui $\binom{n}{r}$ subpopulações diferentes de tamanho $r \leq n$**

Para ser válido para qualquer 0 ≤ *r* ≤ *n*, *define-se*

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$0! = 1$$

$$(n)_0 = 1$$

Exemplo: Problema de Ocupação

- **Considere a distribuição aleatória de *r* bolas em *n* células**
  - *n^r arranjos com probabildade n^{-r} cada*
- **Achar a probabilidade p_k de que uma célula específica contenha exatamente *k* bolas ($k \leq r$)**
  - *k bolas podem ser escolhidas de $\binom{r}{k}$ maneiras diferentes*
  - *as $r-k$ bolas restantes podem ser colocadas nas $n-1$ células restantes de $(n-1)^{r-k}$ formas diferentes*

$$p_k = \frac{1}{n^r}\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}$$

Teorema

- **Sejam $r_1, \ldots, r_k$ inteiros tais que**

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$$

  - *O número de maneiras pelas quais uma população de n elementos pode ser particionada em k subpopulações de tamanhos $r_1,\ldots,r_k$ respectivamente é igual a*

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

Demonstração

$$\binom{n}{r_1} = \frac{n!}{(n-r_1)!r_1!}$$

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2} = \frac{n!}{(n-r_1)!r_1!} \times \frac{(n-r_1)!}{(n-r_1-r_2)!r_2!} = \frac{n!}{(n-r_1-r_2)!r_1!r_2!}$$

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3} = \frac{n!}{(n-r_1-r_2-r_3)!r_1!r_2!r_3!}$$

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-\cdots-r_{k-2}}{r_{k-1}} = \frac{n!}{(n-r_1-\ldots-r_{k-1})!r_1!r_2!\cdots r_{k-1}!}$$

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!} = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-\cdots-r_{k-2}}{r_{k-1}} \quad \blacksquare$$