DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

# DISCIPLINA: MODELAGEM ANALÍTICA DO DESEMPENHO DE SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO

## Variável Aleatória

Prof. Sérgio Colcher
colcher@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro


# Variável Aleatória Real

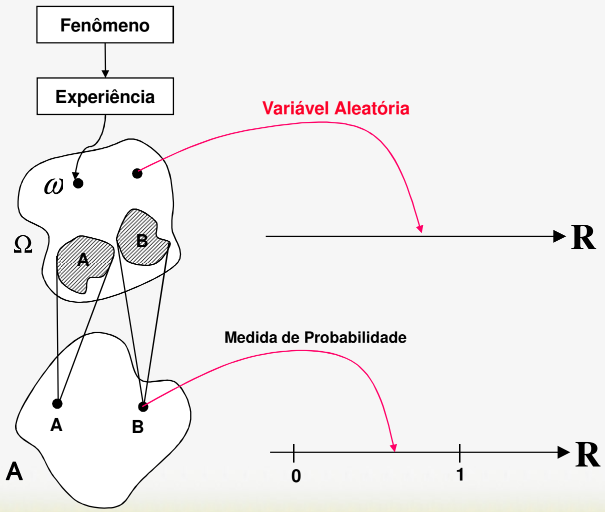


- **O espaço de amostras Ω foi definido como o conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência**
  - ***Os elementos de Ω não são necessariamente numéricos***
    - Mas é quase sempre interessante que Ω tenha uma respresentação numérica
    - Pode-se associar a cada ponto ω ∈ Ω um número real $x(\omega)$
    - Uma função $x$ que mapeia os pontos de Ω em **R é** denominada uma variável aleatória (v.a) real.



# Variável Aleatória Real








# Variável Aleatória Real



- **Definição**
  - ***Uma v.a. real x é uma função***

$$x: \quad \Omega \to \mathbf{R}$$
$$\omega \to \mathbf{R} \quad \text{tal que}$$

i) os conjuntos $A_x = \{\omega \in \Omega : x(\omega) \le X\} \in \mathsf{A}; \forall X \in \mathbf{R}$

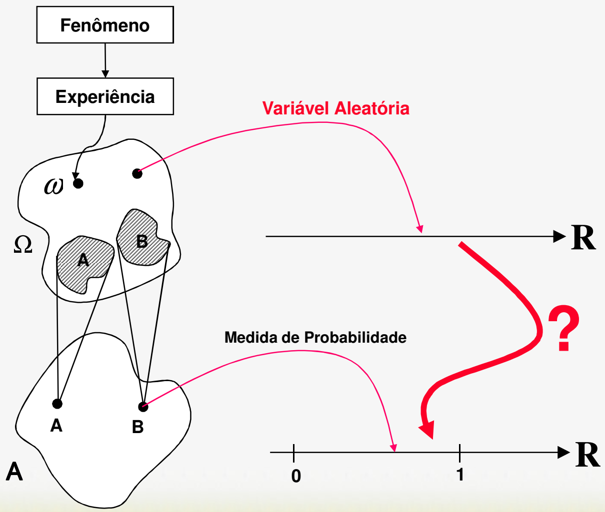
isto é, $A_x$ são eventos válidos para qualquer número real $X$

ii) $P(\{\omega \in \Omega : x(\omega) = \infty\}) = 0$

$P(\{\omega \in \Omega : x(\omega) = -\infty\}) = 0$

# Variável Aleatória Real








# Variável Aleatória Real



Como $\{\omega : x(\omega) \le X\}$ é um evento, é possível atribuir uma probabilidade ao subconjunto $\{x : x \le X\}$ dos Reais da seguinte maneira

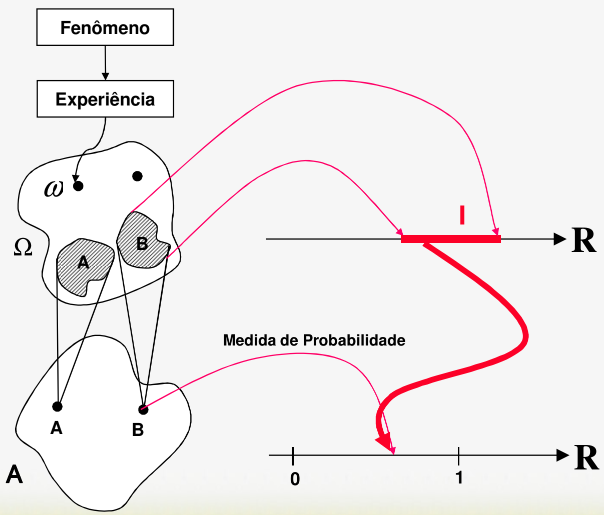
$$P(\{x : x \le X\}) = P(\{\omega : x(\omega) \le X\})$$

- ***Isto garante que qualquer intervalo I de R está também associado a uma probabilidade***



# Variável Aleatória Real








# Tipos de V.A.s



- **V.A. Discreta**
- **V.A. Contínua**
- **V.A. Mista**

# V.A. Discreta



- **Diz-se que uma v.a. é discreta quando o seu contradomínio $\Omega_x$ é um conjunto de pontos isolados (finito ou infinito, porém numerável). Isto significa que**

$$\Omega_x = \{X_1, X_2, \ldots\}$$

  - ***A partir dessa definição é possível verificar a existência de eventos cujo conjunto contém apenas um elemento: $X_i$***
  - ***Como a cada valor da v.a. associa-se uma medida de probabilidade, pode-se escrever que***

$$P(\{\omega \in \Omega : x(\omega) = X_i\}) = p_i; \quad i = 1,2,\ldots$$

com a condição

$$\sum_i p_i = 1$$

  - ***O conjunto {p1, p2, ...} é a distribuição de probabilidade da v.a discreta.***
    - Não confundir com a “Função Distribuição de Probabilidade (FDP)” que será apresentada mais adiante.



# V.A. Contínua



- **Uma v.a. $x$ cujo contradomínio $\Omega_x$ é contínuo, é uma v.a. contínua.**
  - ***$\Omega_x$ é agora um conjunto não numerável e se a probabilidade associada a cada $X \in \Omega_x$ for maior que zero, será violada a condição axiomática de que $P(\Omega)=1$***
    - Neste caso, é mais apropriado definir uma medida de probabilidade associada a intervalos, de tal forma que a função $p_x$, definida em $\Omega_x$, é tal que, para qualquer intervalo $I \subset \mathbf{R}$

$$P(x \in I) = \int_I p_x(X)dX$$



# V.A. Contínua



- **Uma v.a. contínua satisfaz a condição**

$$P(x = X) = 0$$

  - ***É importante ressaltar a diferença entre evento vazio e evento com probabilidade zero***
    - Por exemplo, para uma v.a. contínua, o evento $\{x = X\}$ tem probabilidade zero mas não é vazio pois contém o ponto $X$.



# V.A. Mista



- **Uma v.a. $x$, cujo contradomínio $\Omega_x$ é não numerável, mas que contém um subconjunto (finito ou infinito numerável) no qual cada um de seus pontos tem probabilidade maior que zero é denominado de v.a. mista.**

# Função Distribuição de Probabilidade (FDP)



- A **Função Distribuição de Probabilidade (FDP)** também conhecida como **Função de Distribuição Cumulativa (FDC)** associada a uma v.a. real x é a função definida por

$$F_x : \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \to F_x(X) = P(x \le X)$$

  - *Lembre que na definição de v.a. foi exigido que os subconjuntos {x ≤ X} fossem eventos*



# Exemplo



- **Considere o experimento de lançar um dado com seis faces $f_i$, i = 1, …, 6, onde os resultados de todas as faces são equiprováveis**
- **Seja $x$, uma variável aleatória real, com o seguinte mapeamento:**

$$\Omega \to \mathbf{R}$$
$$f_i \to x(f_i) = i$$

- **Esboçar a FDP de $x$: $F_x(X)$**



# Exemplo



- **Considere o experimento de lançar um dado com seis faces $f_i$, i = 1, …, 6, onde os resultados de todas as faces são equiprováveis**
- **Seja $x$, uma variável aleatória real, com o seguinte mapeamento:**

$$\Omega \to \mathbf{R}$$
$$f_i \to x(f_i) = (i-3)^2$$

- **Esboçar a FDP de $x$: $F_x(X)$**

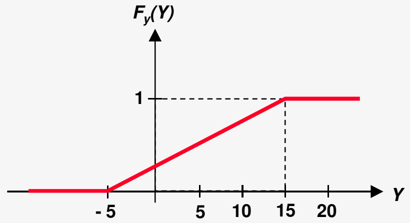


# Propriedades das FDPs

# Exemplo



- **Uma v.a. tem FDC dada por**




- **Desejamos obter**
  - *i.* $F_y(0)$
  - *ii.* $P(0<y\leq\infty)$
  - *iii.* $P(5\leq y\leq 10)$
  - *iv.* $P(y=0)$



# Forma Geral da FDP



- **Toda Função Distribuição de Probabilidade $F_x(X)$ pode ser escrita como**

$$F_x(X) = C_x(X) + D_x(X)$$

**onde $C_x$ é uma função contínua e $D_x$ é um somatório de funções degrau**

$$D_x(X) = \sum_i P(x = X_i)\, u(X - X_i)$$



# Função Densidade de Probabilidade (f.d.p.)



- **Para uma v.a. $x$ com F.D.P $F_x$, define-se como f.d.p. a função $f_x$ dada por**

$$\boxed{f_x(X) = \frac{dF_x(X)}{dX}}$$

- ***Quando a v.a. é discreta, tem-se***

$$f_x(X) = \frac{dF_x(X)}{dX}$$

$$= \frac{d\left[\sum_i \mathrm{P}(x = X_i)\, u(X - X_i)\right]}{dX}$$

$$f_x(X) = \sum_i \mathrm{P}(x = X_i)\, \delta(X - X_i)$$

**A função que descreve P($x$ = $X_i$) é denominada de função de massa de probabilidade (f.m.p.).**



# Propriedades da f.d.p.



**i)** $$\int_{-\infty}^{X} f_x(Y)\,dY = F_x(X)$$

$$F_x(Y)\Big|_{-\infty}^{X} = F_x(X) \quad \blacksquare$$

# Propriedades da f.d.p.



**ii)** $$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(Y)dY = 1$$

$$F_x(Y)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 - 0 = 1 \quad \blacksquare$$



# Propriedades da f.d.p.



**iii)** $$f_x(X) \geq 0$$

$$F_x(X) \text{ é não decrescente} \quad \blacksquare$$



# Propriedades da f.d.p.



**iv)** $$\int_I f_x(X)dX = P(x \in I)$$

Por exemplo, para *I = (a,b]*

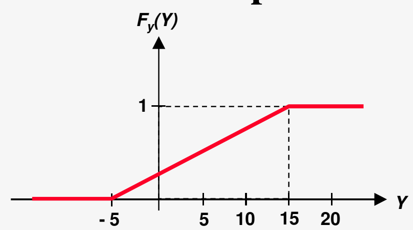
$$P(x \in (a,b]) = F_x(b) - F_x(a)$$
$$= \int_{-\infty}^{b} f(X)dX - \int_{-\infty}^{a} f(X)dX$$
$$= \int_{a}^{-\infty} f(X)dX + \int_{-\infty}^{b} f(X)dX$$
$$= \int_{a}^{b} f(X)dX \quad \blacksquare$$



# Exemplo



- **Uma v.a. tem FDC dada por**




*i.* ***Esboçar a fdp $f_y(Y)$***

*ii.* ***A partir do gráfico de (i), calcular***

*a.* $F_y(0)$

*b.* $P(y>0)$

*c.* $P(5 \leq y \leq 10)$

# Exemplo de Distribuições



- **Contínuas**
  - ***Uniforme***
  - ***Exponencial***
  - ***Gaussiana (ou Normal)***
- **Discretas**
  - ***Bernoulli***
  - ***Binomial***
  - ***Geométrica***
  - ***Poisson***

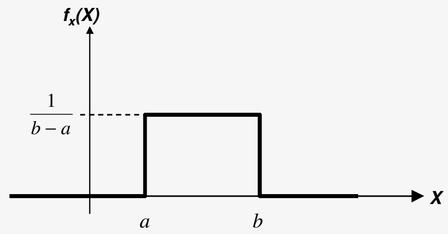


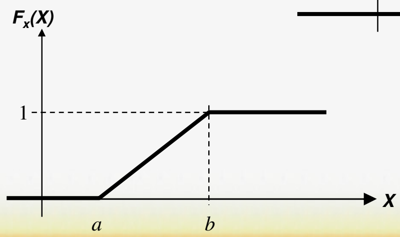
# Exemplo: Distribuição Uniforme



- **Uma v.a. *x* é dita uniformemente distribuída no intervalo [a,b] quando sua f.d.p é dada por**

$$f_x(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le X \le b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



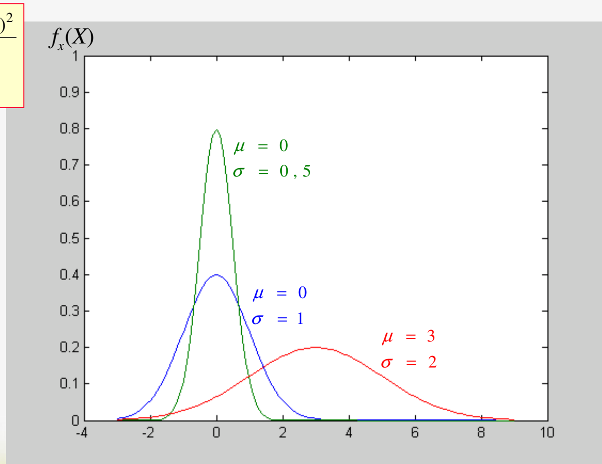






# Distribuição Normal (Gaussiana)



$$f_x(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$






# Distribuição Exponencial



$$f_x(X) = \lambda e^{-\lambda X} u(X) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda X} & , \quad X \ge 0 \\ 0 & , \quad X < 0 \end{cases}$$

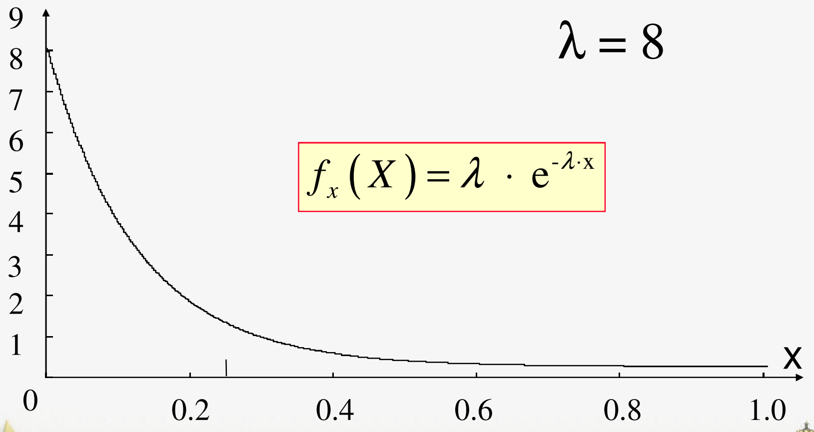
$$F_x(X) = \int_{-\infty}^{X} f_y(Y)\,dY$$

$$= \int_{0}^{X} \lambda e^{-\lambda Y}\,dY$$

$$F_x(X) = \left(1 - e^{-\lambda X}\right) u(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda X} & , \quad X \ge 0 \\ 0 & , \quad X < 0 \end{cases}$$

# Distribuição Exponencial

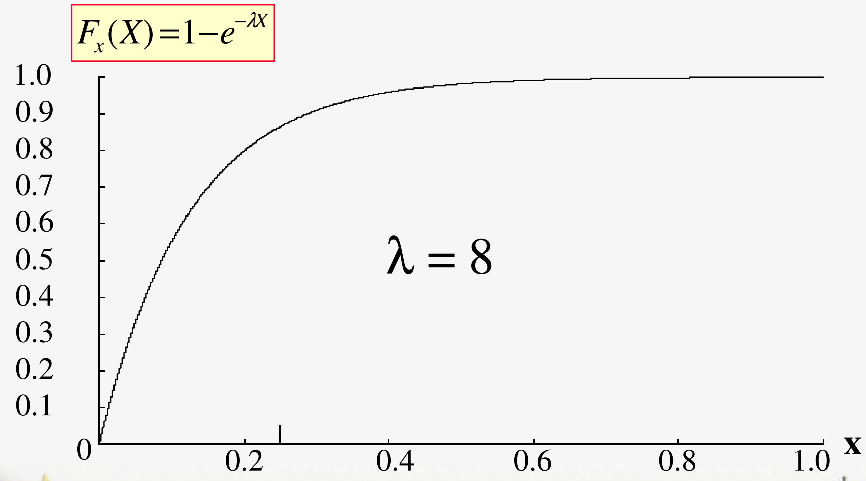







# Distribuição Exponencial








# Valor Esperado



- **O valor esperado E é um operador real, definido sobre o espaço $\mathscr{F}$ das variáveis aleatórias reais, que associa a cada v.a. $x$ o número real E[$x$] tal que**

$$\mathscr{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \mathbf{E}[x] = \int_{-\infty}^{\infty} X f_x(X)\, dX$$

**O valor esperado é também chamado de média**



# Exemplo: Valor Esperado de v.a. Uniforme



$$f_x(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq X \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

# Exemplo: Valor Esperado de v.a. Gaussiana



$$f_x(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



# Valor Esperado de v.a. Discreta

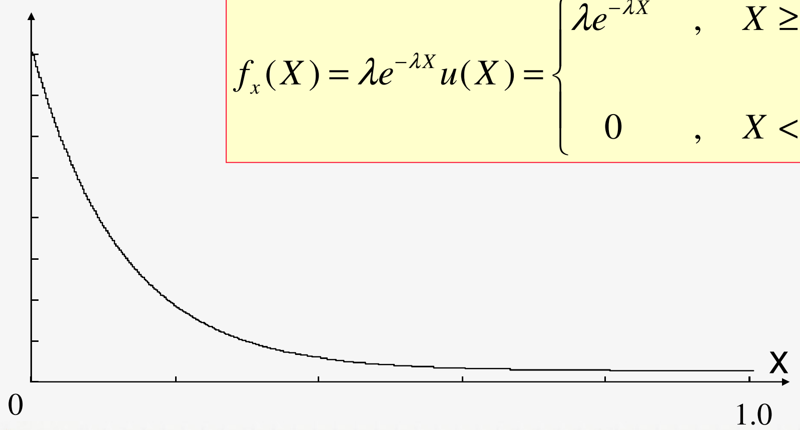




# Valor Esperado de v.a. Exponencial



$$f_x(X) = \lambda e^{-\lambda X} u(X) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda X} & , \quad X \geq 0 \\ 0 & , \quad X < 0 \end{cases}$$






# Variância e Desvio Padrão