Departamento de Informática

Disciplina: **Modelagem Analítica do Desempenho de Sistemas de Computação**

Algumas Distribuições

Prof. Sérgio Colcher
colcher@inf.puc-rio.br

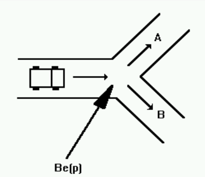
Algumas Distribuições Discretas

Distribuição de Bernoulli

- Um *experimento de Bernoulli* tem somente dois resultados aleatórios possíveis:
  - *sucesso*
  - *fracasso*
- A variável aleatória que corresponde ao experimento anterior é uma *variável aleatória de Bernoulli*.
- A notação de uma *distribuição de Bernoulli* é Be(p), onde $0 \leq p \leq 1$ é a probabilidade de obter-se sucesso.

Distribuição de Bernoulli: Exemplos

- Lançamento de uma moeda
  - *Caso obtenha-se uma cara: sucesso*
  - *Caso obtenha-se uma coroa: fracasso*
- A direção que segue um veículo em uma bifurcação (caminho A ou B)
  - *Se segue o caminho A: sucesso*
  - *Se segue o caminho B: fracasso*



Distribuição de Bernoulli

- **X v.a. ~ Be(p)**
  - *X é uma variável aleatória discreta do experimento de Bernoulli de parâmetro p.*
  - *Os resultados possíveis deste experimento podem ser "mapeados" nos números reais, logo:*
    - Domínio de X:
      - *X ∈ {0, 1}*
        - $P\{X = 0\} = P(0) = 1 - p$
        - $P\{X = 1\} = P(1) = p$

Distribuição de Bernoulli

- **Função Distribuição Cumulativa:**

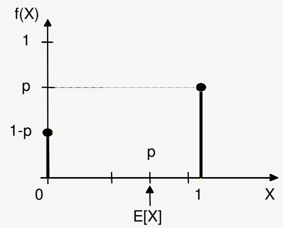
$$F_x(X) = \begin{cases} 1 - p & , \quad 0 \le X < 1 \\ 1 & , \quad X \ge 1 \end{cases}$$

- **Valor esperado:**

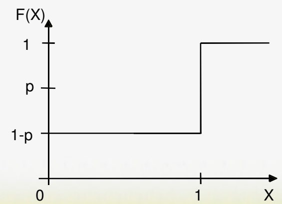
$$E[X] = p.1 + (1 - p).0 = p$$

Distribuição de Bernoulli: Gráficos

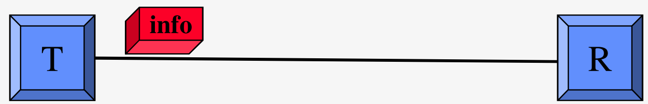
- **Função Densidade de Probabilidade**



- **Função Distribuição Cumulativa**



Distribuição de Bernoulli: Exemplo



- **Um pacote de informações é enviado pelo transmissor ao receptor através de uma conexão, sendo *p* a probabilidade de que o pacote chegue corretamente ao receptor.**
  - ***info chega corretamente a R: x = 1***
  - ***info não chega corretamente a R: x = 0***

Distribuição geométrica

- **Considere N experimentos de Bernoulli independentes, cada um com probabilidade de êxito p**
- **A v.a $x \sim$ Ge(p) representa o número de experimentos (ou tentativas) até conseguir o primeiro êxito**
- **Função de massa de probabilidade:**

$$P\{x=n\}=(1-p)^{n-1}p \quad n=1,2,\ldots$$

- **Função Distribuição Cumulativa:**

$$F_x(n)=\sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1}$$

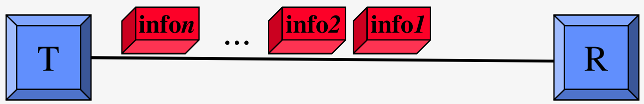
Distribuição Binomial

- **Considere n experimentos independentes identicamente distribuídos (iid), cada um com distribuição Bernoulli de parâmetro p.**
- **Se a variável de interesse y corresponde ao número de sucessos obtidos nestes n experimentos, então y é conhecida como uma variável aleatória binomial de parâmetros n e p.**
  - ***Uma distribuição binomial de parâmetros n e p se denota Bi(n,p), onde:***
    - n é o número de experimentos de Bernoulli independentes realizados.
    - p é a probabilidade de obter um sucesso em cada um dos n experimentos, $0 \leq p \leq 1$.

Distribuição Binomial: Exemplos

- **Uma moeda é lançada n vezes. Se em cada lançamento se obtém cara (sucesso) com probabilidade p, qual é a probabilidade de que se obtenha i sucessos ($0 \leq i \leq n$)?**
- **Observam-se n veículos em uma bifurcação. Cada veículo segue o caminho A (sucesso) com probabilidade p. Qual é a probabilidade de que i veículos ($0 \leq i \leq n$) sigam o caminho A (sucesso)?**

Distribuição Binomial: Exemplo



- **n pacotes de informação são enviados pelo transmissor ao receptor através de uma conexão.**
  - ***A probabilidade de cada um dos pacotes chegar corretamente a R é igual a* p.**
    - Qual é a probabilidade de que i pacotes ($0 \leq i \leq n$) de informação cheguem corretamente ao receptor?

Distribuição Binomial

Modelagem Analítica

- **O evento**
  - *"n tentativas produzem k sucessos e n - k fracassos"*
    - acontece de tantas maneiras quantas forem as amostras contendo k algarismos "1" e n - k algarismos "0"
      - *Ou seja: de quantas maneiras diferentes podemos distribuir k "uns" pelas n posições*
      - *Ou Ainda: de quantas maneiras diferentes podemos escolher k posições para conter "uns"*
        - o evento tem tantos elementos quanto o número de subpopulações (combinações) de tamanho k da população de n elementos
        - cada elemento tem probabilidade $p^k(1-p)^{n-k}$
- **Logo**

$$P(y=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad (0\le k\le n)$$

$$P(y\le k)=\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}, \quad (0\le k\le n)$$

Distribuição Binomial

Modelagem Analítica

- **Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onde as variáveis $\{x_i\}$, $i=1,2,\ldots,n$ são v.a.'s iid Be(p). Seja a v.a. y definida por sua soma:**

$$y=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

- **então:**

$$y \sim Bi(n, p)$$

Distribuição Binomial

Modelagem Analítica

$$E[x]=\sum_{i=0}^{n}i\cdot P(x=i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}i\cdot\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}i\cdot\frac{n!}{(n-i)!\,i!}\cdot p^i(1-p)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{(n-i)!(i-1)!}\cdot p^i(1-p)^{n-i}$$

$$=np\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!}\cdot p^{(i-1)}(1-p)^{n-i}$$

<u>Seja $k = i - 1$</u>

$$E[x]=np\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!}p^k(1-p)^{n-1-k}$$

$$=np\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}}_{}$$

$P(y\le n\text{-}1)$ **para uma variável aleatória binomial formada de** n-1 **experimentos de Bernoulli**

Logo:

$$\boxed{E[x]=np}$$

Distribuição binomial: Gráficos

Modelagem Analítica

Distribuição binomial: Gráficos

Modelagem Analítica

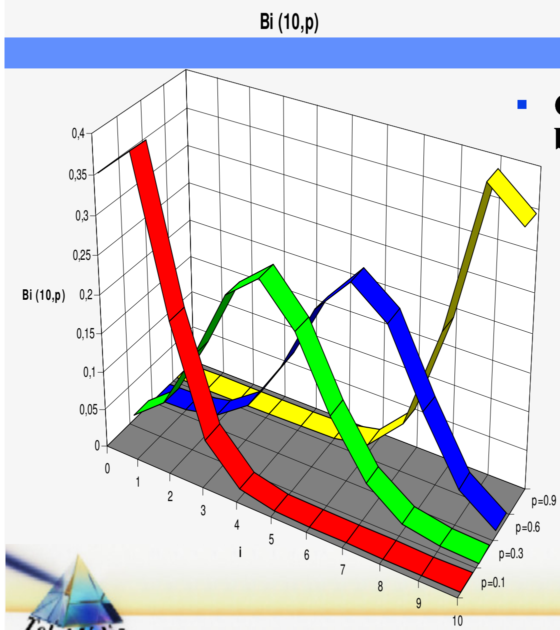
Distribuição binomial: Gráficos

Modelagem Analítica

Distribuição binomial: Gráficos

Modelagem Analítica

Modelagem Analítica



- **Com relação à fdp de uma binomial tem-se que:**
  - ***valor máximo se encontra em $x = E[x] = np$***
  - ***estritamente decrescente para $x > E[x]$***
  - ***simétrica em relação a p***
    - Exemplo: $p = 0.1$ e $p = 0.9$

Aproximação de Poisson

- **Em várias aplicações temos de tratar de experimentos de Bernoulli nos quais, comparativamente, *n* é muito grande e *p* é muito pequeno**
  - ***o que faz com que o produto $\lambda = np$ seja um valor de "magnitude moderada"***
    - obs: λ é o valor esperado da Binomial
- **Nesses casos, é conveniente usar uma aproximação obtida por Siméon D. Poisson (1781-1840) para a probabilidade de obtermos *k* sucessos.**

Aproximação de Poisson

Relembrando: Distribuição Binomial

$$\boxed{P(y=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad (0\le k\le n)}$$

$$P(y=0)=(1-p)^n=\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)^m=e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to\infty}P(y=0)=e^{-\lambda}}$$

Aproximação de Poisson

$$\boxed{P(y=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

$$\frac{P(y=k)}{P(y=k-1)}=\frac{\dfrac{n!}{(n-k)!k!}p^k(1-p)^{n-k}}{\dfrac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}$$

$$=\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$$

$$\frac{P(y=k)}{P(y=k-1)}=\frac{\lambda-(k-1)p}{k(1-p)}$$

Se *p* é muito pequeno:

$$\boxed{\lim_{p\to 0}\frac{P(y=k)}{P(y=k-1)}=\frac{\lambda}{k}}$$

Aproximação de Poisson

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}P(y=0)=e^{-\lambda}} \qquad \boxed{\lim_{p\to 0}\frac{P(y=k)}{P(y=k-1)}=\frac{\lambda}{k}}$$

$$P(y=1)\approx\lambda P(y=0)\approx\lambda e^{-\lambda}$$

$$P(y=2)\approx\frac{1}{2}\lambda P(y=1)\approx\frac{1}{2}\lambda^2e^{-\lambda}$$

$$P(y=3)\approx\frac{1}{3}\lambda P(y=2)\approx\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\lambda^3e^{-\lambda}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{P(y=k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}} \quad \Rightarrow$$

Aproximação para Bi(*n*,*p*) quando *n* é muito grande e *p* é pequeno.

Definindo um parâmetro λ tal que $\lambda=np$ então:
Aproximação para Bi(n, λ/n) quando *n* é muito grande e *p* é pequeno

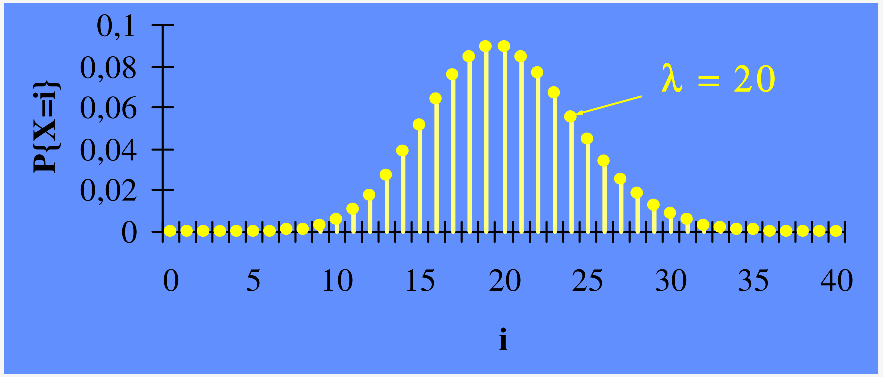
Distribuição de Poisson

$$\boxed{P(y=k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

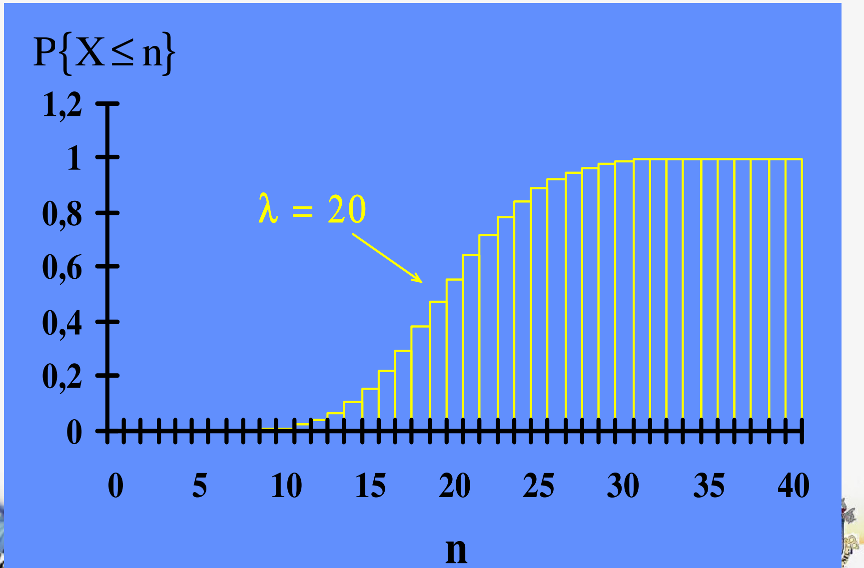
$$F_x(X) = P(x \leq X)$$

$$F_x(X) = \sum_{i=0}^{X} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

Distribuição de Poisson Massa de Probabilidade



Distribuição de Poisson: Cumulativa



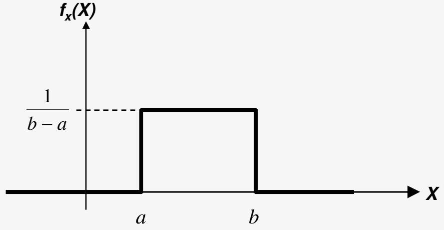
Algumas Distribuições Contínuas

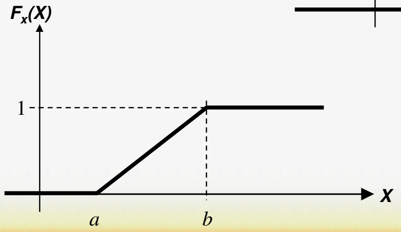
Distribuição Uniforme

Modelagem Analítica

- **Uma v.a. x é dita uniformemente distribuída no intervalo [a,b] quando sua f.d.p é dada por**

$$f_x(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le X \le b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$





Distribuição Exponencial

Modelagem Analítica

$$f_x(X) = \lambda e^{-\lambda X} u(X) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda X} & , \quad X \ge 0 \\ 0 & , \quad X < 0 \end{cases}$$

$$F_x(X) = \int_{-\infty}^{X} f_y(Y)\,dY$$

$$= \int_{0}^{X} \lambda e^{-\lambda Y}\,dY$$

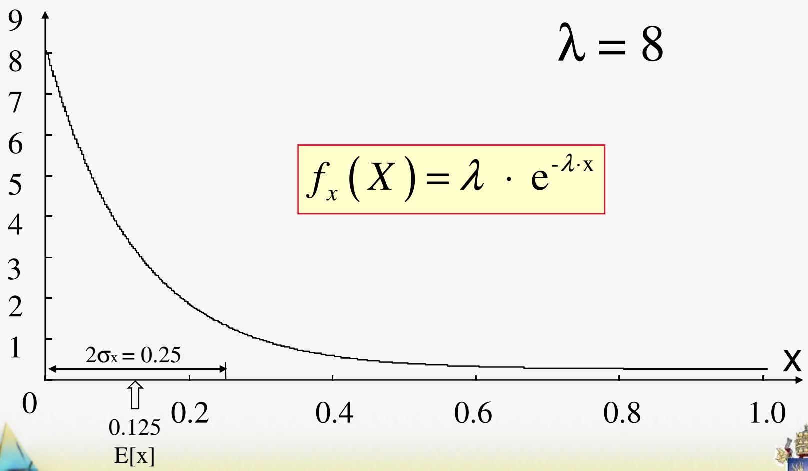
$$F_x(X) = \left(1 - e^{-\lambda X}\right) u(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda X} & , \quad X \ge 0 \\ 0 & , \quad X < 0 \end{cases}$$

Distribuição Exponencial

Modelagem Analítica

$\lambda = 8$

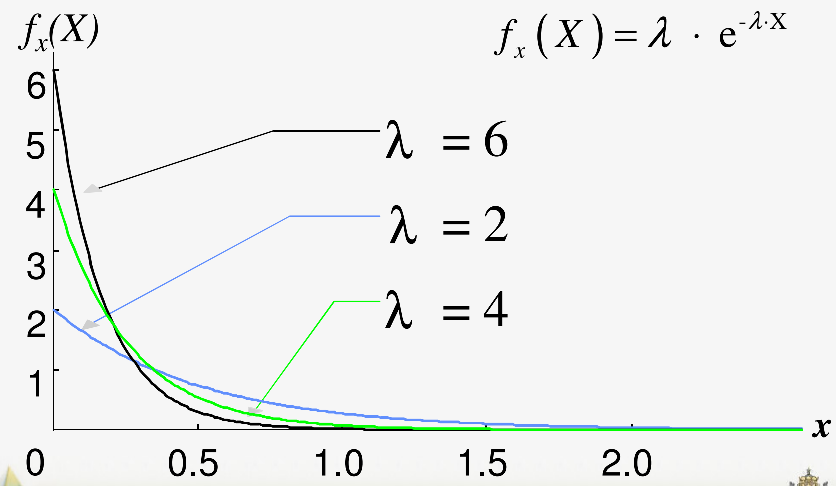
$$f_x(X) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$



Distribuição exponencial

Modelagem Analítica

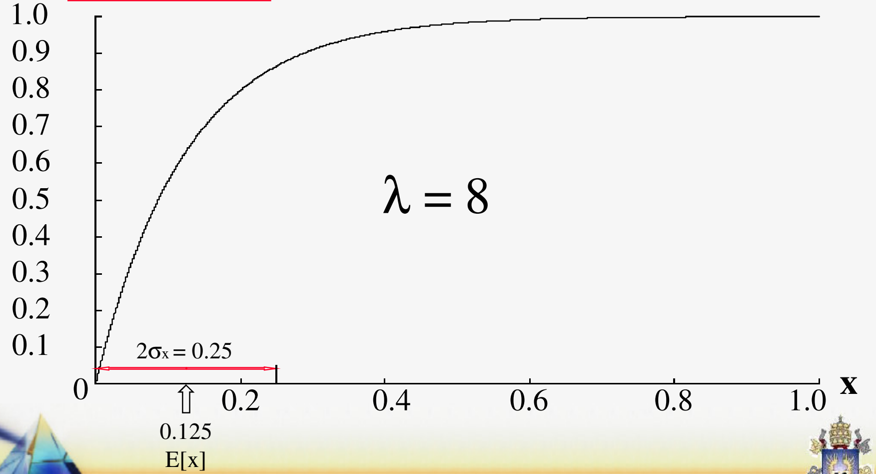
$$f_x(X) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot X}$$



Distribuição Exponencial

Modelagem Analítica

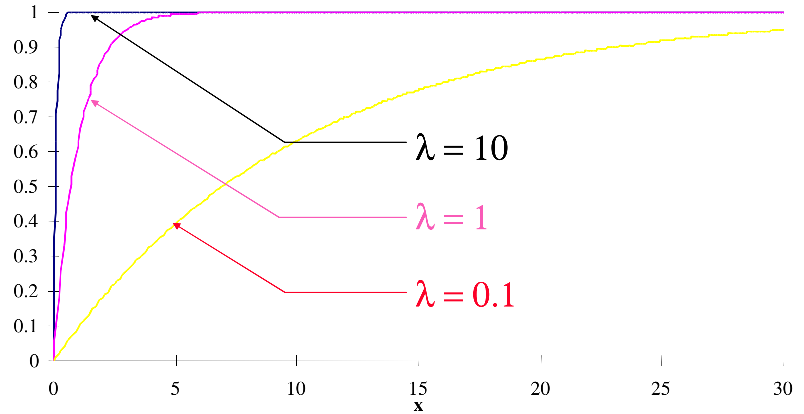
$$F_x(X) = 1 - e^{-\lambda X}$$



Distribuição Exponencial

Modelagem Analítica

$$F_x(X) = 1 - e^{-\lambda X}$$



Distribuição Normal (Gaussiana)

Modelagem Analítica

$$f_x(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F_x(X) = \int_{-\infty}^{X} f_y(Y)\,dY$$

$$= \frac{1}{2} + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$